Beschreibung periodischer Vorgänge in Natur und Technik

W. Timischl

Abteilung für Mathematik in den
Naturwissenschaften und Math. Biologie
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstrasse 8-10/1183
A-1040 Wien

1 Einleitung

Periodische Veränderungen gehören zu den markantesten Eigenschaften von vielen physikalisch-technischen Systemen. Im Schulunterricht hört der Schüler wohl zum ersten Mal davon, wenn die Zeiteinheit mit Hilfe der Erddrehung festgelegt wird. Weitere Schulbeispiele bieten die verschiedenartigen Schwingungen in mechanischen, elektrischen oder atomaren Systemen. Vielleicht weniger geläufig ist die große Palette von periodischen Erscheinungen im nicht-technischen Bereich: Beispielsweise die Herzrhythmen in der Physiologie, die Räuber-Beute-Zyklen in Ökosystemen, die 4-Jahreszyklen bei Tollwutepidemien oder die bei Wirtschaftsdaten auftretenden saisonbedingten Zyklen. Die Vielfalt der periodischen Erscheinungen ist Grund genug, sich mit dem Phänomen näher auseinanderzusetzen. Das soll im folgenden auf zwei unterschiedlichen Ebenen erfolgen.

Zunächst geht es um eine mathematische Behandlung im Sinne einer reinen *Beschreibung* des periodischen Vorgangs. Die interessierende Größe y soll durch eine Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt werden, etwa mit dem Ziel, das durch y beschriebene Systemverhalten vorhersagen zu können. Die Periodizität des zu beschreibenden Vorgangs findet ihren Niederschlag darin, daß f eine periodische Funktion der Zeit ist mit einer gewissen Periode T, d.h., für alle t soll gelten: $f(t+T) = f(t)$.

Wenn man über die Beschreibung der Zeitabhängigkeit hinaus die Frage nach dem *Mechanismus* stellt, der die beobachtete periodische Veränderung bewirkt, gelangt man sehr bald zu *Differentialgleichungsmodellen*, von denen die *Schwingungsgleichung* ein ganz grundlegendes ist. Die Schwingungsgleichung wird erstmals im Physikunterricht (freilich ohne Formulierung als Differentialgleichung) im Zusammenhang mit der harmonischen Bewegung dem Schüler zugemutet. Es erscheint paradox, daß der Mathematiker diese Gleichung Jahre später als zu schwierig für eine Behandlung im Unterricht (zumindest an den allgemeinbildenden höheren Schulen) findet.

2 Die Fourieranalyse: Grundlegende Technik zur Auswertung von periodischen Daten

Die wichtigsten mathematischen Bausteine zur Beschreibung von periodischen Vorgängen sind die Sinus- und die Cosinusfunktion. Diese Funktionen werden meist an Hand eines mechanischen Modells, nämlich eines an einem Ende drehbar fixierten und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω im entgegengesetzten Uhrzeigersinn rotierenden Zeigers von bestimmter Länge r eingeführt (*Zeigermodell*). Der Drehpunkt sei zugleich der Ursprung eines (x, y)-Koordinatensystems; am Anfang möge der Zeiger mit der positiven x-Achse den Winkel φ_0 (*Nullphasenwinkel*) einschließen. Der in t Zeiteinheiten überstrichene Winkel ist ωt. Projiziert man die Zeigerspitze Z auf die y-Achse, so vollführt die Projektion $Z' = (0, y)$ eine auf- und abgehende Bewegung, die bekanntlich durch die allgemeine Sinusfunktion mit der Gleichung $y(t) = r\sin(\omega t + \varphi_0)$ beschrieben wird; r heißt in diesem Zusammenhang die max. Amplitude, ω die Kreisfrequenz, $f = \omega/(2\pi)$ ist die Frequenz und deren Kehrwert ist die Periode T. Die Bewegung des betrachteten Zeigers mit der durch φ_0 festgelegten Ausgangslage kann, wie man aus dem Zeigermodell unmittelbar sieht, durch Überlagerung der Bewegungen von zwei speziellen Zeigern der Länge 1 erklärt werden, nämlich des am Anfang (zum Zeitpunkt $t = 0$) in x-Richtung weisenden *Sinuszeigers* und des in y-Richtung weisenden *Cosinuszeigers*. Mit diesen Zeigern erhält man

$$y(t) = r\sin(\omega t + \varphi_0) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

($a = r\sin\varphi_0$, $b = r\cos\varphi_0$) und man erkennt, daß durch Überlagerung von allgemeinen Sinusfunktionen derselben Periode stets wieder eine allgemeine Sinusfunktion mit eben dieser Periode entsteht. Überlagert man dagegen verschieden schnell rotierende Zeiger, so rotiert der resultierende Zeiger i.a. nicht mehr gleichförmig, wohl aber entsteht bei rationalem Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten (Perioden) wieder eine periodische Bewegung.

Derartige Überlegungen sind ein fester Bestandteil des Schulunterrichts, und man benutzt sie auch dazu, um deutlich zu machen, daß man durch Addition von Sinusfunktionen unterschiedlicher Perioden ganz und gar nichtsinusförmig erscheinende Funktionsgraphen erzeugen kann. Die zu überlagernden Sinusfunktionen werden meist als *trigonometrische Polynome* in der Form

$$a_0' + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + \cdots + a_p \cos p\omega t + b_p \sin p\omega t$$

angeschrieben, d.h., die Summanden sind, wenn man von a_0' absieht, Sinus- bzw. Cosinusterme, die mit ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz f schwingen. Es ist naheliegend, an dieser Stelle weiterführende Fragen zu stellen, nämlich erstens, wie man eine vorgegebene Funktion durch ein bestimmtes trigonometrisches Polynom approximiert (*Approximationsproblem*) und zweitens, ob man bei genügend großem p eine vorgegebene Funktion beliebig genau darstellen kann (*Konvergenzproblem*).

Die zweite Frage wurde von FOURIER um 1820 beantwortet. In seinem Buch über die Wärmeleitung veröffentlichte er das überraschende Ergebnis, daß "ganz willkürliche" Funktionen, die nicht einmal stetig zu sein brauchen, durch einheitliche Ausdrücke, nämlich *Fourierreihen*, dargestellt werden können. Wegen der Bedeutung der Fourierreihen im Zusammenhang mit Anfangs-Randwertproblemen wurde dieses Buch mit Recht als die Bibel der mathematischen Physik bezeichnet. Mittlerweile haben sich Fourierreihen auch in verschiedenen anderen Bereichen als sehr nützliches Instrument erwiesen, insbesondere im Bereich der elektrischen Nachrichtentechnik. So setzt die Berechnung des Klirrfaktors, der ein Maß für die durch ein bestimmtes Übertragungselement erzeugte Oberwelligkeit einer Wechselgröße ist, eine Fourieranalyse voraus, d.h. die Darstellung einer Funktion durch eine Fourierreihe. Auch in der Elektroakkustik werden zur Charakterisierung von "Klangbildern" Fourierreihen verwendet. Es ist daher kein Zufall, daß die Lehrpläne von höheren technischen Lehranstalten die Behandlung von Fourierreihen z.T. als verpflichtend vorschreiben. Ein Auftrag, der aus methodischer Sicht nicht leicht zu erfüllen ist.

Die Schulbuchliteratur bringt wenig Brauchbares für eine in methodischer Hinsicht zufriedenstellende Abhandlung der Thematik: Sie begnügt sich mit der Angabe von Berechnungsformeln. Es ist naheliegend, sich aus der Behandlung der Fourierreihen in den Universitätslehrbüchern methodische Anregungen zu erhoffen. Meist findet man dort das folgende hinreichende Konvergenzkriterium (vgl. z.B. ENDL/LUH 1976):

Es sei f eine auf dem Intervall $[0, T]$ integrierbare Funktion mit der Periode T, und an jeder Stelle dieses Intervalls mögen die links- und rechtsseitigen Grenzwerte sowie die links- und rechtsseitigen Ableitungen existieren. Dann gilt: Die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t \right)$$

mit den Koeffizienten (*Fourierkoeffizienten*)

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t \, dt \quad (k = 0, 1, \ldots), \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t \, dt \quad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

konvergiert an jeder Stelle $t \in [0, T]$ gegen das arithmetische Mittel der links- und rechtsseitigen Grenzwerte.

Jeder, der in der Schule steht, weiß, daß selbst die Formulierung eines solchen Satzes auf reines Unverständnis stoßen würde. Es wäre eine gewisse Erleichterung der Situation, wenn man sich auf spezielle Funktionsklassen, etwa den auf $[0, T]$ stetig differenzierbaren, beschränken könnte. Leider sind aber schon ganz elementare Signalformen (z.B. Rechteckimpulse) nicht von dieser Art. Es ist auch schwer, die oft vor dem Beweis des zitierten Satzes in Universtitätsbüchern gebrachte Motivation für die Berechnungsformeln der Fourierkoeffizienten zu übernehmen, die von der Annahme ausgeht, die Fourierreihe sei auf $[0, T]$ gleichmäßig gegen f konvergent. Unter dieser Annahme könnte man nämlich die mit $\sin k\omega t$ bzw. $\cos k\omega t$ multiplizierte Reihe gliedweise integrieren. Unter Beachtung der Orthogonalitätsrelationen für das Funktionensysten $1, \cos \omega t, \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \ldots$ ergeben sich dann gerade die angegebenen Darstellungen für die Fourierkoeffizienten.

Die Verfolgung des Konvergenzproblems ist also nicht geeignet, auch nur Motivationshilfen für den Schulunterricht zu liefern. Wir wenden uns nun daher dem Approximationsproblem mit trigonometrischen Polynomen zu. Unter Approximation versteht man die Ersetzung einer gegebenen Funktion durch eine geeignet gewählte Funktion. Die Notwendigkeit dazu ergibt sich, wenn entweder für eine durch Meßdaten in Tabellenform oder graphisch vorgegebene Funktion eine formelmäßige Darstellung gesucht wird, oder wenn eine durch eine komplizierte Formel dargestellte Funktion in einem bestimmten Bereich durch eine einfachere angenähert werden soll. Allgemein kann man die Approximationsaufgabe so formulieren (vgl. z.B. OELSCHLÄGEL/MATTHÄUS 1974):

Auf einer Menge I soll eine Funktion f durch eine andere Funktion F aus einer bekannten Funktionenklasse unter Berücksichtigung von bestimmten Forderungen angenähert werden. Die Menge I kann das Intervall $[0, T]$ sein oder nur aus diskreten Stellen $t_1, t_2, \ldots, t_N$ bestehen. Im ersten Fall spricht man von *stetiger*, im zweiten Fall von *diskreter Approximation*.

Bei einer Approximation mit trigonometrischen Polynomen ist die Näherungsfunktion als Linearkombination

$$F(t) = a_0' + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + \cdots + a_p \cos p\omega t + b_p \sin p\omega t$$

mit festem p und frei wählbaren Parametern a_0', a_k, b_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ anzusetzen. Man spricht von einer *Approximation im Mittel*, wenn die Parameter aus der Forderung bestimmt werden, daß die Summe

$$\sum_{i=1}^{N} \Big(f(t_i - F(t_i) \Big)^2$$

bzw. das Integral

$$\int_0^T \Big(f(t) - F(t) \Big)^2 dt$$

der Fehlerquadrate minimal sei. Die Durchführung der Minimierung ist sowohl im diskreten als auch im stetigen Fall elementar, d.h. ohne Zuhilfenahme von partiellen Ableitungen möglich.

Wir befassen uns im folgenden nur mit der Approximation im diskreten Fall, der sogenannten *numerischen Fourieranalyse*, weisen aber darauf hin, daß die stetige Approximation mit trigonometrischen Polynomen in Analogie dazu durchgeführt werden kann. Die im Intervall $[0, T]$ zu approximierende Funktion sei f, die Approximationsfunktion wird wie vorhin mit F bezeichnet. Zur Vereinfachung der Schreibweise gehen wir von der Variablen t auf die Variable $x = \omega t$ über und schreiben $g(x) = f(x/\omega)$ sowie $G(x) = F(x/\omega)$. Zu bestimmen sind die $(2p+1)$ Parameter a_0', $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_p$ so, daß

$$Q(a_0', a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) = \sum_{i=1}^{N} \Big(g(x_i) - G(x_i) \Big)^2$$

ein Minimum annimmt, wobei eine gerade Anzahl $N = 2n$ von Wertepaaren (x_i, y_i) mit $y_i = g(x_i)$ vorgegeben ist und die Stützstellen $x_i = i\Delta$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ äquidistant liegen $(\Delta = 2\pi/N, N > 2p+1)$.

Im Sonderfall $p = 1$ ist $G(x) = a_0' + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ und

$$\begin{aligned} Q(a_0', a_1, b_1) &= \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - a_0' - a_1 \cos x_i - b_1 \sin x_i \Big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N} \Big((y_i - \bar{y}) + (\bar{y} - a_0') - a_1 \cos x_i - b_1 \sin x_i \Big)^2 , \end{aligned}$$

wobei $\bar{y}$ den arithmetischen Mittelwert der gegebenen Funktionswerte y_i bezeichnet. Unter Beachtung der Formeln (der Summationsindex i läuft jeweils von 1 bis N)

$$\sum (y_i - \bar{y}) = 0 ,$$

$$\sum \cos x_i = \sum \sin x_i = \sum \cos x_i \sin x_i = 0 ,$$

$$\sum \cos^2 x_i = \sum \sin^2 x_i = n$$

erhält man nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned} Q(a_0', a_1, b_1) &= \sum (y_i - \bar{y})^2 + \sum (\bar{y} - a_0')^2 + \\ & n\Big(a_1 - \frac{1}{n} \sum y_i \cos x_i \Big)^2 + n\Big(b_1 - \frac{1}{n} \sum y_i \sin x_i \Big)^2 - \\ & \frac{1}{n} \Big[\Big(\sum y_i \cos x_i \Big)^2 + \Big(\sum y_i \sin x_i \Big)^2 \Big] . \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung erkennt man unmittelbar, daß für

$$a_0' = \bar{y} , \; a_1 = \frac{1}{n} \sum y_i \cos x_i , \; b_1 = \frac{1}{n} \sum y_i \sin x_i$$

die Summe der Fehlerquadrate den kleinsten Wert annimmt. Im allgemeinen Fall mit $p \geq 1$ erhält man die Fourierkoeffizienten ($k = 1, 2, \ldots p$):

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i \cos k x_i , \\ b_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i \sin k x_i , \\ a_0' &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i . \end{aligned}$$

Beispiel 1:
Die langjährigen Monatsmittelwerte (Jänner bis Dezember) der Lufttemperatur (in °C) von Wien sind: −1, 0, 5, 10, 15, 18, 20, 19, 16, 10, 5 und 1. Wir verwenden die Näherungsfunktion $F(t) = a_0' + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$ mit $\omega = 2\pi/12 = \pi/6 = 0.5236$, um den Verlauf der mittleren Monatstemperatur zu approximieren. Mit der Variablen t wird die Zeit in Monaten ab Jahresbeginn gemessen; die angegebenen Temperaturwerte $y_1 = -1$, $y_2 = 0, \ldots, y_{12} = 1$ ordnen wir den Monatsmitten $t_1 = 0.5$, $t_2 = 1.5, \ldots, t_{12} = 11.5$ zu. Auf Grund der obigen Berechnungsformeln ($N = 12$, $x_i = (i-1)\pi/6$) ist

$$
\begin{aligned}
a_0' &= \frac{1}{12}(-1 + 0 + 5 + \cdots) = 9.83 \\
a_1 &= \frac{2}{12}(-1 \cdot \cos(0.5\pi/6) + \cdots + 1 \cdot \cos(11.5\pi/6)) = -10.01 \\
b_1 &= \frac{2}{12}(-1 \cdot \sin(0.5\pi/6) + \cdots + 1 \cdot \sin(11.5\pi/6)) = -3
\end{aligned}
$$

Die Approximationsfunktion für den Verlauf der monatlichen Temperaturmittel lautet daher $F(t) = 9.83 - 10.01 \cos(\pi t/6) - 3 \sin(\pi t/6) = 9.83 + 10.45 \sin(\pi t/6 - 1.86)$.

3 Die Schwingungsgleichung: Grundmodell für periodische Vorgänge

Bei der Behandlung der harmonischen Schwingung geht man im Physikunterricht von der gleichförmigen Rotation aus:

Ein Massenpunkt P rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um einen Punkt O. Seine Bahngeschwindigkeit betrage $v = r\omega$ (r ist der Radius der Kreisbahn); die zum Punkt O gerichtete Beschleunigung ist $a_r = r\omega^2$. Nun denke man sich den rotierenden Massenpunkt auf die y-Achse eines Koordinatensystems projiziert, dessen Ursprung in O liegt. Die Projektion $P' = (0, y)$ vollführt entlang der y-Achse eine Bewegung nach dem Zeitgesetz $y(t) = r \sin(\omega t + \varphi_0)$, wobei der Winkel φ_0 die Anfangslage $y_0 = y(0)$ festlegt. Die Geschwindigkeit v_y von P' ist durch $v_y = r\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ gegeben, die Beschleunigung von P' ist $a_y = -r\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y$; das Minuszeichen bringt zum Ausdruck, daß die Beschleunigung positiv für $y < 0$ und negativ für $y > 0$ ist.

Immer dann, wenn bei einer geradlinigen Bewegung der Betrag der Beschleunigung proportional zu der die Lage des Punktes fixierenden Ortskoordinate ist und die Richtung der Beschleunigung stets auf den Punkt O hin weist, spricht man von einer *harmonischen Schwingung*. Mit Hilfe der Darstellung der Beschleunigung als zweiter Ableitung der Lagekoordinate y lautet also der "Steckbrief" einer harmonischen Schwingung $y'' = -\omega^2 y$. Das ist nichts anderes als die (ungedämpfte) *Schwingungsgleichung*. Sinusförnige Veränderungen sind somit dadurch ausgezeichnet, daß die Änderungsrate der Geschwindigkeit einer Zustandsgröße y negativ proportional zu sich sich selbst ist. Der Physiker leitet diese Aussage in der Schule mit Hilfe des Modells eines rotierenden Massenpunktes ab, also im Prinzip mit Hilfe des Zeigermodells, das der Mathematiker benutzt, um die Sinusfunktion einzuführen.

Aus der Wachstumskinetik weiß man, daß exponentielle Veränderungen dadurch charakterisiert sind, daß die Änderungsrate der betrachteten Größe stets proportional zu sich ist. Kann man auch sinusförmige Veränderungen dadurch charakterisieren, daß die betrachtete Größe eine Geschwindigkeit besitzt, deren Änderungsrate stets negativ proportional zur Größe ist? Zur Beantwortung dieser Frage ist aus der Schwingungsgleichung auf die Zeitabhängigkeit der Größe zu schließen, also eine Differentialgleichung zu lösen.

Wir gehen von der Schwingungsgleichung in der Form $y'' + \omega^2 y = 0$ aus. Multipliziert man mit y', so erhält man $y''y' + \omega^2 yy' = 0$. Die linke Seite kann als Zeitableitung dargestellt werden. Differenziert man y^2 nach t, so ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel $2yy'$, d.h. $yy' = (1/2)(d/dt)y^2$. Analog zeigt man, daß $y'y'' = (1/2)(d/dt)y'^2$ ist. Somit erhält man

$$y''y' + \omega^2 yy' = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y'^2 + y^2) = 0$$

oder, wenn man integriert,

$$y'^2 + \omega^2 y^2 = C^2 > 0\,.$$

Das ist aber in der (y, y')-Ebene die Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt im Ursprung O. Es ist einfach, durch eine Veränderung der Zeiteinheit die Ellipse in einen Kreis zu verwandeln. Wir setzen $\alpha = \omega t$ und erhalten unter Beachtung von $dy/dt = dy/d\alpha \cdot d\alpha/dt = \omega dy/d\alpha$ die Gleichung

$$\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + y^2 = r^2$$

eines Kreises mit dem Radius $r = C^2/\omega^2$. In der oberen Halbebene ist $dy/d\alpha > 0$, d.h., y nimmt mit wachsendem α zu. Der Kreis wird daher im Uhrzeigersinn durchlaufen. Jeder Phase des Bewegungsablaufes entspricht ein Punkt Q auf der Kreisbahn, die man auch als *Phasenkurve* bezeichnet. Die $(y, dy/d\alpha)$-Ebene heißt in diesem Zusammenhang *Phasenebene*. Jeden Punkt Q auf der Kreislinie können wir durch den Winkel φ festlegen, den die Strecke von O nach Q mit der $dy/d\alpha$-Achse einschließt. Speziell sei dem Anfangszustand der Bewegung der Winkel φ_0 zugeordnet. Offensichtlich sind die Koordinaten von Q durch $y = r\sin\varphi(\alpha)$ und $dy/d\alpha = r\cos\varphi(\alpha)$ gegeben, wobei φ in noch zu bestimmender Weise von α abhängt. Differenziert man die y-Koordinate von Q nach α, so folgt $dy/d\alpha = r\cos\varphi(\alpha)\cdot(d\varphi/d\alpha)$. Durch Vergleich mit der zweiten Koordinate von Q erhält man $d\varphi/d\alpha = 1$, d.h. $\varphi(\alpha) = \alpha + \varphi_0$. Die Lösung der Schwingungsgleichung zu den willkürlich vorgegebenen Anfangswerten $y(0) = r\sin\varphi_0$ und $dy/dt(0) = \omega r\cos\varphi_0$ ist daher durch

$$y = r\sin(\omega t + \varphi_0)$$

gegeben.

Die Lösungsmethode mit Hilfe der Phasenebene ist nicht nur auf die Schwingungsgleichung beschränkt. Auch die allgmeine linear-homogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten a_1 und a_0 kann damit gelöst werden, wenn man zuerst das Dämpfungsglied $a_1 y'$ durch eine geeignete Transformation beseitigt. Macht man beispielsweise für y den Produktansatz $y(t) = u(t)v(t)$ mit den beiden zunächst noch unbestimmten Funktionen u und v, so geht die Differentialgleichung über in

$$u''v + u'(2v' + a_1 v) + u(v'' + a_1 v' + a_0 u) = 0\,.$$

Der Klammerausdruck $(2v' + a_1 v)$ bei u' verschwindet, wenn man $v = exp(-a_1 t/2)$ setzt. Unter Beachtung von $v' = -a_1 v/2$, $v'' = a_1{}^2 v/4$ ergibt sich damit für u die Differentialgleichung

$$u'' + \beta u = 0$$

mit $\beta = a_0 - a_1{}^2/4$. Ist β positiv, so ist diese Gleichung vom Typ der Schwingungsgleichung mit der Lösung $u = u_0\sin(\sqrt{\beta}t + \varphi_0)$. Die Lösung der unverkürzten Differentialgleichung ist daher durch

$$y = u_0 e^{-a_1 t/2}\sin(\sqrt{\beta}t + \varphi_0)$$

gegeben, wobei u_0 und φ_0 vom Anfangszustand abhängige Parameter sind. Je nach dem Vorzeichen von a_1 ergeben sich exponentiell gedämpfte oder anwachsende Oszillationen.

Bei negativem β sind die Phasenkurven Hyperbeln: Der durch die Differentialgleichung beschriebene Bewegungsablauf ist in diesem Fall unperiodisch.

Beispiel 2:
An einen Serienschwingkreis mit dem Ohmschen Widerstand $R = 5\Omega$, der Induktivität $L = 0.1H$ und der Kapazität $C = 500\mu F$ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ die Gleichspannung $U_0 = 10V$ angelegt. Zur Bestimmung der Zeitabhängigkeit der Stromstärke i gehen wir von der KIRCHHOFFschen Maschenregel aus, die mit Hilfe der Ladung q in der Form

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{U_0}{L}$$

angeschrieben werden kann. Wenn am Anfang der Kondensator ungeladen ist, muß

$$q(0) = 0\,, \quad i(0) = \frac{dq}{dt}(0) = 0$$

gelten. Wir beseitigen zuerst die konstante Inhomogenität auf der rechten Seite, indem wir statt q die Variable $y = q - U_0/L$ einführen. Diese genügt der linear-homogenen Differentialgleichung

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

mit $a_1 = 50$ und $a_0 = 20000$ (alle Größenangaben verstehen sich in SI-Einheiten). Wegen $\beta = a_0 - a_1{}^2/4 = 19375 > 0$ und $a_1 > 0$ treten gedämpfte Schwingungen auf. Man erhält mit den zunächst noch unbestimmten Konstanten y_0, φ_0 bzw. C_1, C_2

$$\begin{aligned} q &= 0.005 + y \\ &= 0.005 + y_0e^{-25t}\sin(139.19t + \varphi_0) \\ &= 0.005 + e^{-25t}(C_1\cos 139.19t + C_2\sin 139.19t)\,. \end{aligned}$$

Wegen $q(0) = 0 = 0.005 + C_1$ ist $C_1 = -0.005$. Aus der zweiten Anfangsbedingung $i(0) = q'(0) = 0$ findet man $C_2 = 0$. Somit ist

$$i = \frac{dq}{dt} = 0.696e^{-25t}\sin 139.19t\,.$$

4 Schlußbemerkung

Im Zusammenhang mit der Beschreibung von periodischen Vorgängen treten in der Praxis zwei grundlegende Problemstellungen auf.

Die Beobachtung eines periodischen Vorganges liefert i.a. eine sogenannte Zeitreihe, also eine Folge von Zahlenwerten, die in meist äquidistant liegenden Zeitpunkten registriert wurden. Der erste Schritt in Richtung auf eine Beschreibung des zu untersuchenden Vorganges besteht darin, eine Kurve an die periodischen Daten anzupassen. Die Anpassung erfolgt in der Regel auf der Grundlage der *Methode der kleinsten Quadrate*, die als eine universelle Methode zur Bestimmung von Schätzwerten in den Schulunterricht Eingang finden sollte. Gelegenheit dazu findet sich an verschiedenen Stellen, etwa im Zusammenhang mit der Minimaleigenschaft des arithmetischen Mittelwertes (der von den Beobachtungswerten im Mittel den kleinsten quadratischen Abstand besitzt) oder im Zusammenhang mit der einfachen linearen Regression. Die Kurvenanpassung bei periodischen Daten stellt einen weiteren Anwendungsfall dar, der gleichzeitig auch einen Zugang zur *Fourieranalyse* vermittelt, indem er auf konstruktivem Weg zu Formeln für die Fourierkoeffizienten führt.

Die rein heuristische Beschreibung eines Phänomens durch Kurvenanpassung erklärt nicht, wodurch eine beobachtbare Periodizität bewirkt wird. Aussagen darüber können durch geeignete *Modellbildungen* gewonnen werden. Das bekannteste Modell für periodische Vorgänge ist die *Schwingungsgleichung*. Mit ihr verbindet man zu Unrecht die Vorstellung, daß eine Lösung ohne Kenntnisse der Theorie der linearen Differentialgleichungen nicht möglich sei. Die Lösungsmethode mit Hilfe der Phasenebene dreht gewissermaßen den Weg um, auf dem im Physikunterricht die Schwingungsgleichung als Modell für die harmonische Schwingung hergeleitet wird.

Literatur

ENDL, K. und Wolfgang LUH (1976): Analysis II. Wiesbaden: Akademische Verlagsgesellschaft.

OELSCHLÄGEL, D. und W.-G. MATTHÄUS (1974): Numerische Methoden. Leipzig: Teubner.